Irrationality of $\zeta(3)$

1 Introduction

다음과 같이 정의된 함수를 리만 제타 함수(Riemann zeta function)이라 한다.

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad (s \in \mathbb{C})$$

리만 제타 함수는 현대 정수론에서 아주 중요한 함수이므로, 많은 독자들이 이 함수에 대해 익숙할 것이라고 생각한다. 리만 제타 함수는 소수의 분포와 밀접하게 연관되어 있으며, 많은 수학자들은 소수의 비밀을 풀 열쇠라고 생각한다. 특히 리만 가설(Riemann hypothesis)이라 불리는, 리만 제타 함수와 관련된 추측은 현대 수학계에서 해결해야 할 중요하고 주요한 과제라고 말할 수 있을 것이다.
이 글에서는, 리만 제타 함수의 특수값들, 특히 자연수에서의 리만 제타 함수의 값들에 관심을 가져 보자.

$s = 1$ 이면, $\zeta(s)$가 발산하는 것은 쉽게 알 수 있다. $\zeta(2)$의 값을 계산하는 문제는 초기 해석학의 유명하고 어려운 문제였으며, 바젤 문제(Basel Problem)라 불렸다. $\zeta(2)$는 $1.644934\cdots$에 수렴하는데, 오일러(Euler, 1735)가 $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$인 것을 처음 밝혔다. 이것은 수학의 가장 아름다운 결과 중 하나로 꼽힌다.
오일러는 계속해서 짝수에서의 리만 제타 함수 값들을 계산하여, $\zeta(4), \zeta(6), \cdots, \zeta(26)$까지의 값들을 계산했다(일례로, $\zeta(26) = \frac{1315862}{11094481976030578125}\pi^{26}$이다.). 아마 오일러는 계속하려면 계속해서 짝수에서의 값들을 계산할 수 있었을 것이다. 실제로 모든 짝수에서의 리만 제타 함수의 값은 닫힌 형식으로 계산할 수 있다. 오일러는 1750년 $\zeta(2n) = \frac{2^{2n-1}|B_{2n}|\pi^{2n}}{(2n)!}$임을 밝혔다(여기서 B_n 는 베르누이 수열이다.).

반면에 홀수에서의 리만 제타 함수의 값을 구하는 것은 아주 어려운 문제이다. 일반적인 경우는 고사하고, 아직 $\zeta(3)$의 닫힌 형식조차 밝혀지지 않았다. 최근까지는 $\zeta(3)$이 유리수인지 무리수인지조차 밝혀지지 않다가, 아페리(Apéri, 1978)가 $\zeta(3)$이 무리수임을 증명하였다. 그때부터 $\zeta(3)$는 아페리 상수(Apéri's constant)라고 불린다. 오늘 이 글의 주제는, 이 Apéri's constant가 무리수임을

증명하는 것이다. 이 글에서는 1978년의 아페리의 증명과는 조금 다른 방법으로 증명할 것이다(Beuker(1979)의 방법과 비슷한 것이다.).

2 Apéri's theorem

Theorem 2.1 (Apéri's theorem)**.** *$\zeta(3)$는 무리수이다.*

이 정리를 증명하기 위하여 필요한 일련의 보조정리들을 소개하고 증명하겠다.

Definition 2.1. *$1, 2, \cdots, n$의 최소공배수를 d_n이라 하자.*

Lemma 2.1. *$d_n < n^{\pi(n)}$*

Proof. $d_n = \prod_{\substack{p \le n \\ p \text{ prime}}} p^{\lfloor \log_p n \rfloor} \le \prod_{\substack{p \le n \\ p \text{ prime}}} p^{\log_p n} = \prod_{\substack{p \le n \\ p \text{ prime}}} n = n^{\pi(n)}$
$\therefore d_n \le n^{\pi(n)}$ 가 성립한다. □

Lemma 2.2. *충분히 큰 n에 대하여, $n^{\pi(n)} < 2.99^n$가 성립한다.*

Proof. 소수정리에 의하여, 충분히 큰 n에 대하여 $\pi(n) < \log 2.99 \cdot \frac{n}{\log n}$이 성립한다($\log 2.99 > 1$). 그러므로, $n^{\pi(n)} < n^{\log_n 2.99^n} = 2.99^n$. □

Lemma 2.3. *r, s는 음 아닌 정수라 하자. $r > s$이면,*

1) $\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^r y^s}{1-xy} dxdy$ 는 분모가 d_r^2의 약수인 유리수이다.

2) $\int_0^1 \int_0^1 \frac{-x^r y^s \log(xy)}{1-xy} dxdy$ 는 분모가 d_r^3의 약수인 유리수이다.
또 $r = s$이면,

3) $\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^r y^s}{1-xy} dxdy = \zeta(2) - \sum_{j=1}^{r} \frac{1}{j^2}$

4) $\int_0^1 \int_0^1 \frac{-x^r y^s \log(xy)}{1-xy} dxdy = 2(\zeta(3) - \sum_{j=1}^{r} \frac{1}{j^3})$
여기서 $r = 0$이면 $\sum_{j=1}^{r} a_j = 0$이라 하자.

Proof. t를 음 아닌 정수라고 하자. $I(t)$를 다음과 같이 정의하자.

$$I(t) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^{r+t} y^{s+t}}{1-xy} dxdy$$

$r > s$일 때, 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned} I(t) &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^{r+t}y^{s+t}}{1-xy}dxdy \\ &= \int_0^1 \int_0^1 x^{r+t}y^{s+t} \sum_{k=0}^{\infty} x^k y^k dxdy \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 x^{r+t+k}dx \int_0^1 y^{s+t+k}dy \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{r+t+k+1} \cdot \frac{1}{s+t+k+1} \\ &= \frac{1}{r-s} \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{1}{s+t+k+1} - \frac{1}{r+t+k+1}) \end{aligned}$$

그러므로,

$$I(t) = \frac{1}{r-s}(\frac{1}{s+1+t} + \cdots + \frac{1}{r+t})$$

를 얻는다. 여기서 $I(0) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^r y^s}{1-xy}dxdy = \frac{1}{r-s}(\frac{1}{s+1} + \cdots + \frac{1}{r})$이므로, *1)*이 성립한다.

그리고, $I(t)$를 t에 대하여 미분하면, 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} I'(t) &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} \frac{x^{r+t}y^{s+t}}{1-xy}dxdy \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \log(xy) \cdot \frac{x^{r+t}y^{s+t}}{1-xy}dxdy \end{aligned}$$

한편, $I(t)$의 분수 합 형태의 식을 미분하면

$$I'(t) = \frac{-1}{r-s}(\frac{1}{(s+t+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(r+t)^2})$$

이다. 두 식이 같으므로,

$$-I'(0) = \int_0^1 \int_0^1 -\log(xy) \cdot \frac{x^r y^s}{1-xy}dxdy = \frac{1}{r-s}(\frac{1}{(s+1)^2} + \cdots + \frac{1}{r^2})$$

이다. 그러므로 *2)*가 성립한다.

이제 $r = s$라 하자. 그러면 위에서의 과정과 비슷한 과정을 따라,

$$I(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+r+t+1)^2}$$

임을 알 수 있다. 그러므로, $I(0) = \zeta(2) - \sum_{j=1}^{r} \frac{1}{j^2}$가 성립한다. 여기에서 *3)*을 보였다.

또 $I(t)$를 t로 미분하여 $t = 0$을 대입하면, 비슷하게 *4)*를 얻을 수 있다. □

Lemma 2.4. $u, v, w \in (0,1)$ 이면, $\varphi(u,v,w) = \frac{u(1-u)v(1-v)w(1-w)}{1-(1-uv)w} \leq \frac{1}{27}$ 이다.

Proof. 산술기하 부등식에서, $1-(1-uv)w = (1-w)+uvw \geq 2\sqrt{1-w}\sqrt{uvw}$ 이다. 그러므로,

$$\varphi(u,v,w) \leq \frac{1}{2}\sqrt{(1-w)uvw}(1-u)(1-v)$$

이다.

$0 < x < 1$에서 $x(1-x)$의 최대값은 $\frac{1}{4}$이고, $x(1-x^2)$의 최대값은 $\frac{2}{3\sqrt{3}}$이다. 그러므로,

$$\begin{aligned}
\varphi(u,v,w) &\leq \frac{1}{2}\sqrt{(1-w)w}\cdot\sqrt{u}(1-u)\cdot\sqrt{v}(1-v) \\
&\leq \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3\sqrt{3}}\cdot\frac{2}{3\sqrt{3}} \\
&= \frac{1}{27}
\end{aligned}$$

□

이제 Theorem 2.1를 증명하자.

Proof. P_n을 다음과 같이 정의하자.

$$P_n(x) = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\big(x^n(1-x)^n\big)$$

P_n이 n차 정수계수다항식인 것을 쉽게 알 수 있다. 이제 다음과 같이 I_n을 정의하자.

$$I_n = \int_0^1\int_0^1 \frac{-\log(xy)}{1-xy}P_n(x)P_n(y)dxdy$$

그러면, $P_n(x)P_n(y)$는 정수계수다항식이다. Lemma 2.3에 의해서,

$$I_n = \frac{A_n + B_n\zeta(3)}{d_n^3}$$

을 만족하는 정수 A_n, B_n가 존재한다.

$\int_0^1 \frac{1}{1-(1-xy)z}dz = -\frac{\log(xy)}{1-xy}$ 이므로, I_n을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$I_n = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{P_n(x)P_n(y)}{1-(1-xy)z}dxdydz$$

또, 연쇄법칙과 부분적분법을 이용해서, 다음 과정을 따라갈 수 있다.

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{P_n(x)P_n(y)}{1-(1-xy)z}dxdydz \\
&= \frac{1}{n!}\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{\frac{d}{dx}\Big(\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\big(x^n(1-x)^n\big)\Big)P_n(y)}{1-(1-xy)z}dxdydz \\
&= \frac{1}{n!}\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{P_n(y)}{1-(1-xy)z}d\Big(\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\big(x^n(1-x)^n\big)\Big)dydz \\
&= \frac{1}{n!}\int_0^1\int_0^1\int_0^1 P_n(y)yz\frac{\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\big(x^n(1-x)^n\big)}{\big(1-(1-xy)z\big)^2}dxdydz
\end{aligned}$$

이런 과정을 n번 반복하면, 다음을 얻는다.

$$I_n = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 P_n(y)\frac{(xyz)^n(1-x)^n}{\big(1-(1-xy)z\big)^{n+1}}dxdydz$$

이제, $w = \frac{1-z}{1-(1-xy)z}$를 치환하면,

$$I_n = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{(1-x)^n(1-w)^nP_n(y)}{1-(1-xy)w}dxdydw$$

가 된다. 여기서 위와 같이 n번의 부분적분을 거치면, 결과적으로

$$I_n = \int_0^1\int_0^1 \frac{-\log(xy)}{1-xy}P_n(x)P_n(y)dxdy = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{\big(x(1-x)y(1-y)z(1-z)\big)^n}{\big(1-(1-xy)w\big)^{n+1}}dxdydw$$

를 얻게 된다.
여기서 다시 Lemma 2.3와 Lemma 2.4에 의해서,

$$\begin{aligned} I_n &\leq \frac{1}{27^n}\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{1}{1-(1-xy)w}dxdydz \\ &= \frac{1}{27^n}\int_0^1\int_0^1 \frac{-\log(xy)}{1-xy}dxdy = \frac{2}{27^n}\zeta(3) \end{aligned}$$

가 성립한다.
위 적분값은 0보다 크기 때문에,

$$0 < |A_n + B_n\zeta(3)|d_n^{-3} < 2\zeta(3)\frac{1}{27^n}$$

가 성립한다.

결론을 부정하여 $\zeta(3)$이 유리수, 예컨대 $\zeta(3) = \frac{a}{b}$라 하자(a, b는 자연수). Lemma 2.1, 2.2 에 의하여,

$$0 < |bA_n + aB_n| < 2b\zeta(3)\Big(\frac{d_n}{3^n}\Big)^3 < 2b\zeta(3)\Big(\frac{2.99}{3}\Big)^{3n}$$

충분히 큰 n을 잡으면, 자연수인 $|bA_n + aB_n|$ 가 1보다 작아지므로 모순이다. 그러므로, $\zeta(3)$은 무리수이다. $\square$

위와 비슷하지만 더 간단한 과정을 거쳐서, $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$가 무리수임을 보일 수 있다. 이것은 π가 무리수라는 것에 대한 또 다른 증명이 될 수 있을 것이다.

3 사족

언급했듯이, $\zeta(3)$가 실제로 어떤 값인지는 모른다. $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\cdots$에 대해서도 우리가 아는 바는 거의 없다.

짝수에서와 같이, $\zeta(3)$도 π^3에 어떤 유리수를 곱한 값이 아닐까? 이런 추측은 자연스러운 것이지만, 이것은 다음이 유리수라는 추측과 동치이다.

$$\frac{\zeta(3)}{\pi^3} = 0.038768179602916798941\cdots$$

이 수가 유리수라는 것은 믿기 힘든 일이다.

홀수에서의 리만 제타 함수의 값들이 무리수인지 어떤지에 대해 알려진 결과 중 주목할 만한 것으로는 다음과 같은 것들이 있다.

1. 라이벌(Rival, 2000)은, $\zeta(2n+1)$이 무리수가 되도록 하는 자연수 n은 무한히 많음을 보였다.

2. 주딜린(Zudilin, 2001)은, $\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \zeta(11)$ 중 적어도 하나는 무리수임을 보였다.

References

Jonathan M. Borwein, Peter B. Borwein : *Pi and the AGM* (1987) Julian Havil : *Exploring Euler's constant* (2003)